

安徽大学 202 —202 学年第二学期

《数值分析》期中考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

院/系_____ 年级_____ 专业_____ 姓名_____ 学号_____

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

得 分	
-----	--

1. 近似数 $x^* = 2.315$ 关于准确值 $x = 2.31565$ 有_____位有效数字，相对误差是_____.
2. 高斯消去法求解线性方程组的过程中若主元素的绝对值太小会发生_____.
3. 设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 2 重实根，则求 x^* 的两种改进的牛顿迭代公式分别为_____和_____.
4. 若用二分法求方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[3,4]$ 内的根，如果结果要保留 3 位有效数字，则需要二分区间 $[3,4]$ _____次.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得 分	
-----	--

5. 一个数值计算方法是稳定的是指：若该方法在节点 x_n 处的数值解 y_n 有 δ_n 扰动，而在以后各节点的近似值记为 y_m ($m > n$) 上产生的扰动 δ_m 有下面的关系().
 A. $\delta_m \leq \delta_n$ B. $|\delta_m| < |\delta_n|$ C. $|\delta_m| \leq |\delta_n|$ D. $|\delta_m| > |\delta_n|$
6. 求解线性方程组 $Ax = b$ 的 LU 分解法中， A 需要满足的条件是().
 A. A 为对称矩阵 B. A 为正定矩阵 C. $|A| \neq 0$ D. A 的各阶顺序主子式不为零
7. 当 () 时，求解线性方程组
$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + ax_3 = -1 \end{cases}$$
 的 Gauss-Seidel 迭代法一定收敛.
 A. $a > 7$ B. $a = 6$ C. $|a| < 6$ D. $|a| > 7$
8. 下面 () 不是数值计算应注意的问题.
 A. 注意简化计算步骤，减少运算次数 B. 要避免相近两数相减

C. 要尽量消灭误差

D. 要防止大数吃掉小数

9. 用列主元消去法解线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$
 , 第 1 次消元, 选择主元为 ().

A. -4

B. 3

C. 4

D. -9

10. 割线法是通过曲线上的点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), ((x_k, f(x_k)))$ 的直线与 () 的交点的横坐标作为方程 $f(x) = 0$ 的近似根.

A. $y = x$

B. $y = \varphi(x)$

C. y 轴

D. x 轴

三、计算题 (每小题 11 分, 共 55 分)

得分	
----	--

11. 试建立计算 $\sqrt[3]{a}$ 的牛顿-拉夫森迭代格式, 并求 $\sqrt[3]{411.791}$ 的近似值, 要求迭代误差不超过 10^{-6} (取初始值 $x_0 = 8$).

12. 设对称正定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Ax = b, \quad x = (x_1, x_2)^T.$$

(1) 试求 $\text{cond}_2(A)$.

(2) 记 $b = (1, -1)^T$, $\delta b = (1, 1)^T$, 分析常数项的扰动 δb 对方程组 $Ax = b$ 解的影响, 结果说明什么问题?

13. 用 Doolittle 分解法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

14. 分析方程

.

$$e^x - x^2 - 5 = 0$$

存在几个根，并用迭代法求出这些根（精确至 3 位有效数字）.

15. 设有线性方程组
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

(1) 写出求解该方程组的 Jacobi 迭代格式;

(2) 用 Jacobi 迭代求方程组的近似解, $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$, 初始值为 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

四、证明题（共计 9 分）

得 分	
-----	--

已知将线性方程组 $Ax = b$ 按迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 求解时收敛的充分条件为 $\|B\| < 1$ ，若记第 k 次近似解 $x^{(k)}$ 与精确解 x^* 的误差限为 ε ，即 $\|x^{(k)} - x^*\| \leq \varepsilon$ ，证明：迭代次数 k 应满足

$$\ln \frac{\varepsilon(1 - \|B\|)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} / \ln \|B\| \leq k .$$